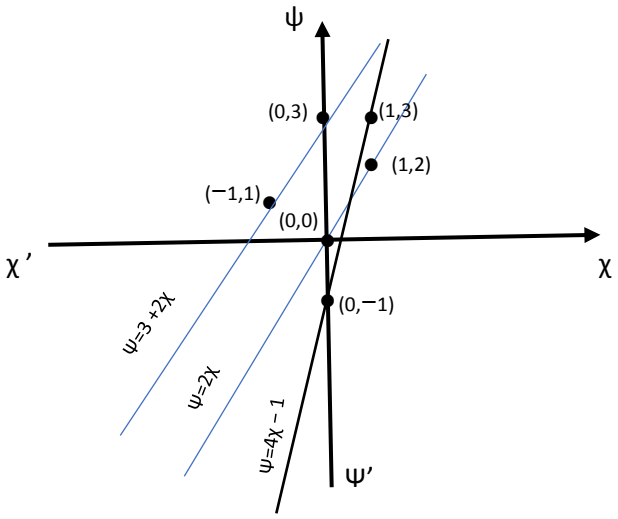
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΑΛΓΕΒΡΑ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

26. Οι κλίσεις (συντελεστές διεύθυνσης) των ευθειών ε_1 , ε_2 , ε_3 , είναι : $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 2$ αντίστοιχα.

Αφού $\alpha_1 = \alpha_3 = 2$ τότε $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_3$ (παράλληλες) .
Για την ε_1 είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο (0,0) . Επίσης για χ = 1 τότε ψ = 2·1 = 2 άρα η ε_1 διέρχεται και από το σημείο (1,2) .
Για την ε_2 είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο (0,β) άρα από το σημείο (0,−1) .
Επίσης για χ = 1 τότε ψ = 4·1− 1 = 3 άρα η ε_2 διέρχεται και από το σημείο (1,3) .

Για την ε_3 είναι γνωστό ότι διέρχεται από το σημείο (0,β) άρα από το σημείο (0,3) .
Επίσης για χ = −1 τότε ψ = 3 + 2·(−1) = 1 άρα η ε_3 διέρχεται και από το σημείο (−1,1) .



27. α) Αφού $\varepsilon_1 \,//\, \varepsilon_2$ τότε $\alpha_1 = \alpha_2$ ⇔ $\lambda - 1 = 4 - \frac{5\lambda-1}{3}$ ⇔ $3\lambda - 3\cdot 1 = 3\cdot 4 - 3\cdot\frac{5\lambda-1}{3}$ ⇔
⇔ $3\lambda - 3 = 12 - (5\lambda - 1)$ ⇔ $3\lambda - 3 = 12 - 5\lambda + 1$ ⇔ $3\lambda + 5\lambda = 12 + 1 + 3$ ⇔ $8\lambda = 16$ ⇔
⇔ $\lambda = \frac{16}{8}$ ⇔ **λ = 2**

β) Για λ = 2 είναι ε_1 : ψ = (2 – 1)χ ⇔ ψ = 1χ ⇔ **ψ = χ**
και ε_2 : $\psi = \left(4 - \frac{5\cdot 2-1}{3}\right)\chi + 5$ ⇔ ψ = (4 – 3)χ + 5 ⇔ ψ = 1χ + 5 ⇔ **ψ = χ + 5 .**
είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ άρα εφω = 1 τότε **ω = 45°**

γ) Για το Α(105,100) θέτω όπου χ=105 και ψ=100 στην ε_2 : ψ = χ+5 ⇔ 100 = 105 +5 ⇔
⇔ 100 = 105 **ΔΕΝ** ισχύει άρα η ε_2 **δεν διέρχεται** από το σημείο Α(105,100) .

Για το Β(500,505) θέτω όπου χ=500 και ψ=505 στην ε_2 : ψ = χ+5 ⇔ 505 = 500 +5 ⇔
⇔ 505 = 505 **ισχύει** , άρα η ε_2 **διέρχεται** από το σημείο Β(500,505) .

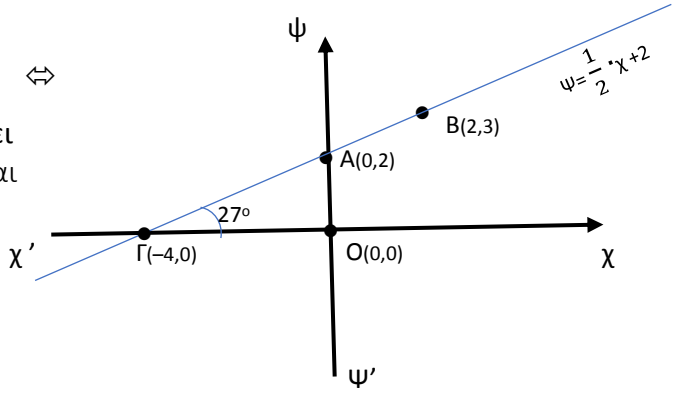
28. α) Είναι γνωστό ότι για την ευθεία ψ = αχ + β ισχύει α = εφω άρα $\frac{\lambda-3}{10}$ = εφ27° ⇔
⇔ $\frac{\lambda-3}{10} = 0{,}5$ ⇔ λ – 3 = 10·0,5 ⇔ λ = 5 + 3 ⇔ **λ = 8** .

β) Για λ = 8 είναι ε : $\psi = \frac{8-3}{10}\cdot\chi + 2$ ⇔ $\psi = \frac{1}{2}\cdot\chi + 2$ η οποία ως γνωστό διέρχεται από το σημείο (0,β) άρα από το Α**(0,2) .** Επίσης για χ = 2 τότε $\psi = \frac{1}{2}\cdot 2 + 2$ ⇔ ψ = 3 άρα η ευθεία

ε διέρχεται και από το σημείο Β(2,3) .

γ) Για ψ = 0 τότε $0 = \frac{1}{2}\cdot\chi + 2 \Leftrightarrow 2\cdot 0 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\chi + 2\cdot 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 = \chi + 4 \Leftrightarrow$ **χ = – 4 ,** άρα η ευθεία τέμνει τον άξονα χ'χ στο σημείο **Γ(– 4,0) .** Επίσης είναι γνωστό ότι τέμνει τον άξονα ψ'ψ στο σημείο **Α(0,2) .**



δ) Επειδή το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ορθογώνιο στο Ο, τότε το εμβαδό του τριγώνου ΑΟΓ είναι $E = \frac{OA\cdot O\Gamma}{2} = \frac{2\cdot 4}{2} = \mathbf{4}$.

29. Στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνω την μεγαλύτερη πλευρά που είναι η ΒΓ και την υψώνω στο τετράγωνο : $B\Gamma^2 = 17^2 = \mathbf{289}$, στη συνέχεια βρίσκω το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών : $AB^2 + A\Gamma^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = \mathbf{289}$. Αφού ισχύει $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$ τότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Π.Θ. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με γωνία $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{90^\circ}$.

Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α τότε : $ημΓ = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{8}{17} = 0{,}4705$ άρα σύμφωνα με τον πίνακα που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου είναι **Γ ≈ 28°** . Επίσης $\hat{\mathbf{B}} \approx 180^\circ - \hat{A} - \hat{\Gamma} \approx$ $\approx 180^\circ - 90^\circ - 28^\circ \approx$ **62°** .

30. α) Ισχύει $ημB = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{15}{17}$ και $συνB = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{8}{17}$. Παίρνω το 1° μέλος της ζητούμενης σχέσης :

$$(ημB)^2 + (συνB)^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{225}{289} + \frac{64}{289} = \frac{289}{289} = 1 .$$

β) Ισχύει $\mathbf{εφΓ} = \frac{AB}{A\Gamma} = \mathbf{\frac{8}{15}}$ (1) και $ημΓ = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{8}{17}$ και $συνΓ = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{15}{17}$.
Παίρνω το δεύτερο μέλος της ζητούμενης ισότητας :

$$\mathbf{\frac{ημΓ}{συνΓ}} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{8\cdot 17}{15\cdot 17} = \mathbf{\frac{8}{15}}$$ (2) . Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει : $εφΓ = \frac{ημΓ}{συνΓ}$.

31. Στο τρίγωνο ΑΒΔ παίρνω την μεγαλύτερη πλευρά που είναι η ΑΒ και την υψώνω στο τετράγωνο : $AB^2 = (\sqrt{50})^2 = \mathbf{50}$, στη συνέχεια βρίσκω το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών : $A\Delta^2 + B\Delta^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = \mathbf{50}$. Αφού ισχύει $AB^2 = A\Delta^2 + B\Delta^2$ τότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Π.Θ. το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με γωνία $\widehat{\mathbf{A\Delta B}} = \mathbf{90^\circ}$. Άρα και η $\widehat{\mathbf{A\Delta\Gamma}} = \mathbf{90^\circ}$ τότε και το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο .

Επομένως στο ισοσκελές (αφού ΑΔ=ΒΔ) και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ είναι : $\widehat{\mathbf{A\Delta B}} = \mathbf{90^\circ}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B\widehat{A\Delta}} = \mathbf{45^\circ}$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ είναι $ημΓ = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \mathbf{\frac{5}{13}} = 0{,}3846$ άρα **Γ ≈ 23°** και

$συν\widehat{\mathbf{\Delta A\Gamma}} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \mathbf{\frac{5}{13}} = 0{,}3846$ άρα $\widehat{\mathbf{\Delta A\Gamma}} \approx \mathbf{67^\circ}$

Στο τρίγωνο ΑΒΔ είναι , $\widehat{\mathbf{B}}$ **= 45°** , **Γ ≈ 23°** και **ΒΑΓ ≈** ΒΑΔ + ΔΑΓ **≈** 45 + 67 **≈ 112°**

32. Με Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκω την ΑΓ : $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 - ΑΒ^2$ ⇔ $ΑΓ^2 = 5^2 - 3^2$ ⇔
⇔ $ΑΓ^2 = 25 - 9$ ⇔ $ΑΓ^2 = 16$ ⇔ $ΑΓ = \sqrt{16}$ ⇔ **ΑΓ = 4 .**

Στη συνέχεια υπολογίζω όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ :

Επειδή το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ισχύουν : $ημω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$, $συνω = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{4}{5}$, $εφω = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{3}{4}$

Επίσης $ημφ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{4}{5}$, $συνφ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{3}{5}$, $εφφ = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{4}{3}$.

α) συνω · εφω = ημω

Το 1ο μέλος είναι : $συνω \cdot εφω = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \mathbf{\frac{3}{5}}$, Το 2ο μέλος είναι : $ημω = \mathbf{\frac{3}{5}}$, άρα ισχύει η ισότητα α) .

β) $ημω \cdot συνω \cdot εφω + ημω \cdot συνω \cdot \frac{1}{εφω} = 1$

Το 1ο μέλος είναι : $ημω \cdot συνω \cdot εφω + ημω \cdot συνω \cdot \frac{1}{εφω} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{9 \cdot 4}{25 \cdot 4} + \frac{12}{25} \cdot \frac{4}{3} =$

$= \frac{9}{25} + \frac{12}{25} \cdot \frac{4}{3} = \frac{9}{25} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{25 \cdot 3} = \frac{9}{25} + \frac{4 \cdot 4}{25} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \mathbf{1}$. Άρα ισχύει η ισότητα β) .

γ) $(συνφ)^2 + (εφφ)^2 + (ημφ)^2 = \frac{1}{(συνφ)^2}$

Το 1ο μέλος είναι : $(συνφ)^2 + (εφφ)^2 + (ημφ)^2 = (\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{3})^2 + (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{9} + \frac{16}{25} =$

$= \frac{9+16}{25} + \frac{16}{9} = \frac{25}{25} + \frac{16}{9} = 1 + \frac{16}{9} = \frac{9}{9} + \frac{16}{9} = \mathbf{\frac{25}{9}}$. Το 2ο μέλος είναι : $\frac{1}{(συνφ)^2} = \frac{1}{(\frac{3}{5})^2} =$

$= \frac{\frac{1}{1}}{\frac{9}{25}} = \frac{1 \cdot 25}{1 \cdot 9} = \mathbf{\frac{25}{9}}$. Άρα ισχύει η ισότητα γ) .