ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ − ΑΛΓΕΒΡΑ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

18. Στο τρίγωνο ΑΒΓ , επειδή είναι ορθογώνιο , εφαρμόζω το Πυθαγόρειο Θεώρημα (Π.Θ.) :
$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 36 + 64 \Leftrightarrow ΒΓ^2 = 100 \Leftrightarrow ΒΓ = \sqrt{100} \Leftrightarrow$ **ΒΓ = 10**

Στο τρίγωνο ΔΕΖ , επειδή είναι ορθογώνιο , εφαρμόζω το Π.Θ. :
$ΔΕ^2 + ΕΖ^2 = ΔΖ^2 \Leftrightarrow 12^2 + ΕΖ^2 = 13^2 \Leftrightarrow ΕΖ^2 = 13^2 - 12^2 \Leftrightarrow ΕΖ^2 = 169 - 144 \Leftrightarrow ΕΖ^2 = 25 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ΕΖ = \sqrt{25} \Leftrightarrow$ **ΕΖ = 5**

Στο τρίγωνο ΘΗΙ : Θέτω ΘΗ = ΗΙ = χ και εφαρμόζω το Π.Θ. αφού είναι ορθογώνιο .
$\Leftrightarrow ΘΗ^2 + ΗΙ^2 = ΘΙ^2 \Leftrightarrow χ^2 + χ^2 = (\sqrt{32})^2 \Leftrightarrow 2χ^2 = 32 \Leftrightarrow χ^2 = \frac{32}{2} \Leftrightarrow χ^2 = 16 \Leftrightarrow χ = \sqrt{16} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ **χ = 4**

19. Στο πρώτο σχήμα : $Ε = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = \frac{48}{2} =$ **24**

Στο δεύτερο σχήμα : $Ε = \frac{ΔΕ \cdot ΕΖ}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = \frac{60}{2} =$ **30**

Στο τρίτο σχήμα : $Ε = \frac{ΗΘ \cdot ΗΙ}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2} =$ **8**

20. Στο τρίγωνο ΚΛΜ παίρνω την μεγαλύτερη πλευρά που είναι η ΚΜ και την υψώνω στο τετράγωνο :
$ΚΜ^2 = 20^2 =$ **400** , στη συνέχεια βρίσκω το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών :
$ΚΛ^2 + ΛΜ^2 = 12^2 + 16^2 = 144 + 256 =$ **400** . Αφού ισχύει $ΚΜ^2 = ΚΛ^2 + ΛΜ^2$ τότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Π.Θ. το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο με γωνία $\widehat{Λ} = 90°$.

Ομοίως στο τρίγωνο ΝΡΣ : μεγαλύτερη πλευρά είναι η $ΝΣ = \sqrt{5}$ με $ΝΣ^2 = (\sqrt{5})^2 =$ **5** και
$ΝΡ^2 + ΡΣ^2 = 2^2 + 1^2 = 4+1 =$ **5** . Αφού ισχύει $ΝΣ^2 = ΝΡ^2 + ΡΣ^2$ τότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Π.Θ. το τρίγωνο ΝΡΣ είναι ορθογώνιο γωνία $\widehat{Ρ} = 90°$.

Ομοίως στο τρίγωνο ΤΑΒ : μεγαλύτερη πλευρά είναι η $ΤΒ = \sqrt{13}$ με $ΤΒ^2 = (\sqrt{13})^2 =$ **13** και
$ΤΑ^2 + ΑΒ^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{12})^2 = 5+12 =$ **17** . Αφού **ΔΕΝ** ισχύει $ΤΒ^2 = ΤΑ^2 + ΑΒ^2$ τότε το τρίγωνο ΤΑΒ δεν είναι ορθογώνιο .

21. Είναι γνωστό ότι οι γωνίες ενός τετραγώνου είναι ορθές και οι πλευρές είναι ίσες . Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ είναι ορθογώνια και ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΑΔ = α . Τότε εφαρμόζω Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ : $ΑΒ^2 + ΒΓ^2 = ΑΓ^2 \Leftrightarrow α^2 + α^2 = (\sqrt{14})^2 \Leftrightarrow 2α^2 = 14 \Leftrightarrow α^2 = \frac{14}{2} \Leftrightarrow$ **$α^2$ = 7cm** . Αφού το εμβαδόν τετραγώνου είναι $Ε = α^2$ τότε **Ε = 7 cm^2 .**

22. Ομοίως με την άσκηση 21 αν οι πλευρές του είναι ίσες με α , τότε το εμβαδόν είναι $E = α^2$ ⇔ $\mathbf{50 = α^2}$ και με Π.Θ. έχουμε $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2$ ⇔ $ΒΔ^2 = α^2 + α^2$ ⇔ $ΒΔ^2 = 2α^2$ ⇔ $ΒΔ^2 = 2 \cdot 50$ <=> $ΒΔ^2 = 100$ ⇔ $ΒΔ = \sqrt{100}$ ⇔ **ΒΔ = 10 cm .**

23. Πρώτα θα αποδείξω ότι το ΑΓ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΔ . Στο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνω την μεγαλύτερη πλευρά που είναι η ΑΒ και την υψώνω στο τετράγωνο : $ΑΒ^2 = 25^2 = \mathbf{625}$, στη συνέχεια βρίσκω το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων δύο πλευρών : $ΑΓ^2 + ΒΓ^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 =$ $= \mathbf{625}$. Αφού ισχύει $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 + ΒΓ^2$ τότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Π.Θ. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με γωνία $\widehat{ΒΓΑ} = 90°$, άρα το ΑΓ είναι κάθετο στην ΒΔ άρα είναι **ύψος** του τριγώνου ΑΒΔ , επίσης η γωνία $\widehat{ΑΓΔ} = 90°$. Με Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ βρίσκω την ΓΔ : $ΑΓ^2 + ΓΔ^2 = ΑΔ^2$ ⇔ $20^2 + ΓΔ^2 = (\sqrt{689}\,)^2$ ⇔ $ΓΔ^2 = 689 – 400$ ⇔ $ΓΔ^2 = 289$ ⇔ $ΓΔ = \sqrt{289}$ ⇔ ⇔ **ΓΔ = 17** τότε **ΒΔ** = ΒΓ + ΓΔ = 15 + 17 = **32 .** Επομένως το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΔ είναι :

$E = \frac{ΒΔ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{32 \cdot 20}{2} = \mathbf{320}$.

24. Μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου ΗΘΚ είναι η ΗΚ =10 με $\mathbf{ΗΚ^2} = 10^2 = \mathbf{100}$ και $\mathbf{ΗΘ^2 + ΘΚ^2} =$ $8^2 + 6^2 = 64 + 36 = \mathbf{100}$ αφού ισχύει $\mathbf{ΗΚ^2 = ΗΘ^2 + ΘΚ^2}$ τότε το τρίγωνο ΗΘΚ είναι ορθογώνιο με $\widehat{Θ} = 90°$. Άρα το εμβαδό του τριγώνου ΗΘΚ είναι $\mathbf{E_{ΗΘΚ}} = \frac{ΘΚ \cdot ΘΗ}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = \mathbf{24}$ **.**

Στη συνέχεια με Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΘΛ βρίσκω την ΘΛ : $ΘΛ^2 + ΘΗ^2 = ΗΛ^2$ ⇔ ⇔ $ΘΛ^2 + 8^2 = (\sqrt{233}\,)^2$ ⇔ $ΘΛ^2 = 233 – 64$ ⇔ $ΘΛ^2 = 169$ ⇔ $ΘΛ = \sqrt{169}$ ⇔ **ΘΛ = 13 .**

Άρα $\mathbf{E_{ΗΘΛ}} = \frac{ΘΛ \cdot ΘΗ}{2} = \frac{13 \cdot 8}{2} = \mathbf{52}$ **.** Επομένως το ζητούμενο εμβαδό είναι : $\mathbf{E_{ΗΚΛ}} = \mathbf{E_{ΗΘΛ}} – \mathbf{E_{ΗΘΚ}} =$ $= 52 – 24 = \mathbf{28}$ **.**

$2_{ος}$ τρόπος : είναι **ΚΛ =** ΘΛ – ΘΚ = 13 – 6 = **7** και επειδή $\widehat{Θ} = 90°$ τότε το ΗΘ είναι ύψος του Τριγώνου ΗΘΚ άρα : $\mathbf{E_{ΗΚΛ}} = \frac{ΚΛ \cdot ΘΗ}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = \mathbf{28}$ **.**

25. Αφού η περίμετρος είναι 60 cm τότε : ΑΓ + ΑΒ + ΒΓ = 60 ⇔ $χ + 9 + \frac{2χ}{3} + 2χ – 4 = 60$ ⇔

⇔ $3χ + 3 \cdot 9 + 3 \cdot \frac{2χ}{3} + 3 \cdot 2χ – 3 \cdot 4 = 3 \cdot 60$ ⇔ $3χ + 27 + 2χ + 6χ – 12 = 180$ ⇔ $3χ + 27 + 2χ + 6χ – 12 = 180$

⇔ $3χ + 2χ + 6χ = 180 – 27 + 12$ ⇔ $11χ = 165$ ⇔ $χ = \frac{165}{11}$ ⇔ **χ = 15 .** Στη συνέχεια βρίσκω τις πλευρές του τριγώνου : **ΑΓ** = χ + 9 = 15 + 9 = **24 cm** , **ΑΒ** = $\frac{2χ}{3} = \frac{2 \cdot 15}{3}$ = **10 cm** ,

ΒΓ = 2χ – 4 = 2·15 – 4 = **26 cm** .

Μεγαλύτερη πλευρά του είναι η ΒΓ = 30 με $\mathbf{ΒΓ^2} = 26^2 = \mathbf{676}$ και $\mathbf{ΑΒ^2 + ΑΓ^2} = 10^2 + 24^2 = 100 + 576 = \mathbf{676}$

Αφού ισχύει $\mathbf{ΒΓ^2} = \mathbf{ΑΒ^2 + ΑΓ^2}$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\widehat{Α} = 90°$

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό ορθογωνίου τριγώνου έχει διπλό τύπο : $E = \frac{ΑΒ \cdot ΑΓ}{2} = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2}$ όπου ΑΔ το ύψος προς την υποτείνουσα ΒΓ, άρα $\frac{10 \cdot 24}{2} = \frac{26 \cdot ΑΔ}{2}$ ⇔ $10 \cdot 24 = 26 \cdot ΑΔ$ ⇔ $\mathbf{ΑΔ} = \frac{10 \cdot 24}{26} = \mathbf{\frac{120}{13}}$ cm

Σχήμα της ασκ. **25**